

## **Разработка параллельного программного обеспечения для решения трехмерной задачи о рождении торнадо по теории Николаевского.**

**Аветисян А.И., Бабкова В.В., Гайсарян С.С.(1), Губарь А.Ю(2)**

**(1) ИСП РАН; (2) ИФЗ РАН**

### **Аннотация**

The goal of the paper is development of a scalable parallel program calculating the numerical solution of the system of equations modeling the processes and origin conditions of intensive atmospheric vortices (IAV) in 3D compressible atmosphere according to the theory of mesovortice turbulence by Nikolaevskiy. Original system of non-linear equations, and its initial and boundary conditions are discussed, the choice of finite-difference scheme of accuracy needed is performed, the corresponding finite-difference system of equations, as well as limitations on its parameters are formulated. The structure of a parallel program for high performance cluster is developed. The problems concerning to optimization of the program in order to increase its scalability are studied. In summary the results of numerical computations are discussed.

Цель настоящей работы состоит в разработке масштабируемой параллельной программы численного решения системы уравнений, моделирующей процессы и условия генерации интенсивных атмосферных вихрей (ИАВ) в трехмерной сжимаемой атмосфере, исходя из теории мезомасштабных вихрей по Николаевскому. В статье рассматривается исходная система нелинейных дифференциальных уравнений, ее граничные и начальные условия, выбирается разностная схема требуемой точности, выписывается соответствующая система разностных уравнений, формулируются ограничения на параметры разностной системы. Рассматривается структура параллельной программы, выполняющей расчеты на высокопроизводительном кластере. Обсуждаются проблемы оптимизации программы с целью повышения ее масштабируемости. В заключении обсуждаются результаты численных расчетов.

### **1. Введение**

Цель настоящей работы состоит в разработке масштабируемой параллельной программы численного решения системы уравнений, моделирующей процессы и условия генерации интенсивных атмосферных вихрей (ИАВ) в трехмерной сжимаемой атмосфере, исходя из теории мезомасштабных вихрей по Николаевскому [1]. Возможность развития ИАВ (торнадо, ураганов) за счет начальной энергии мезовихрей впервые была показана в [2], где представлены результаты численного моделирования осесимметричного вихря в одномерной несжимаемой атмосфере.

Математическая модель представляет собой сильно нелинейную многокомпонентную трехмерную систему уравнений в частных производных смешанного типа, которая до сих пор не рассматривалась в литературе; аналитические решения ее неизвестны, а численное решение производится впервые.

Объем вычислений, необходимых для получения численного решения настолько велик, что возникает необходимость в выполнении программы на высокопроизводительных вычислительных системах. Кластеры являются одним из распространенных типов таких систем.

Разработка масштабируемых программ для кластеров не сводится к решению задачи о том, какие фрагменты программы могут быть выполнены параллельно, хотя и решение этой задачи нередко требует значительных усилий. После выявления распараллеливаемых фрагментов программы необходимо решить еще три проблемы:

- (1) как распределить данные между узлами кластера, чтобы обеспечить однородность (сбалансированность) вычислений;
- (2) какие операции передачи данных использовать, чтобы добиться минимального времени синхронизации вычислений на узлах;
- (3) как разместить данные в памяти узла, чтобы добиться высокой степени локальности данных<sup>1</sup> и тем самым обеспечить максимальную скорость вычислений на каждом узле.

Из перечисленных задач лишь третья исследована достаточно полно, и существуют соответствующие рекомендации и эвристики [3]. Решение остальных двух проблем зависит от квалификации программиста. В настоящее время разрабатываются программные инструменты, облегчающие решение этих задач. Ряд таких инструментов реализован в интегрированной среде разработки параллельных программ ParJava [4], которая была использована при разработке прикладной программы моделирования ИАВ.

В работе рассматривается исходная система нелинейных дифференциальных уравнений, ее граничные и начальные условия. Описывается разностная схема и соответствующая система разностных уравнений с ограничениями на параметры. Приводятся структуры последовательной и параллельной версий алгоритма и обсуждаются полученные результаты моделирования.

## 2. Математическая модель и численный метод

Принимая гипотезу сухоадиабатической атмосферы [5], из общей теории мезомасштабной турбулентности [1] можно получить следующую систему уравнений движений воздуха, представляющих собой законы сохранения массы, импульса, а также их первых моментов:

$$\partial_t a = -U_j \partial_j a - (U_3 a_{0z} + Div) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \partial_t U_i = & -U_j \partial_j U_i + A_1 (f \Delta U_i + \partial_i Div) + U_{ij} \phi_j \\ & + A_2 \varepsilon_{ijk} \hat{A}_j [f \omega_k] + \delta_{i3} g \cdot 0.4a(1+0.2a) - c^2 \partial_i a \end{aligned} \quad (2)$$

$$\partial_t J = -U_j \partial_j J + A_4 (f \Delta J + \phi_j \partial_j J), \quad (3)$$

$$\partial_t F_i = -U_j \partial_j F_i + A_3 (f \Delta F_i + \phi_j \partial_j F_i) + (f/J)(A_3 + A_4)(\partial_j F_i)(\partial_j J) - 2A_2 \omega_i, \quad (4)$$

<sup>1</sup> Локальность данных связана с тем обстоятельством, что в кэш-память загружается сразу некоторый блок данных. Если данное, к которому производится обращение уже загружено, то экономится время на обновление памяти. О временной локальности говорят тогда, когда происходит обращение по одному и тому же адресу. Пространственная локальность имеет место при обращении к данному, входящему в уже загруженный блок.

где  $i, j = 1, 2, 3$ , ( $z = X_3$  - высота от поверхности Земли),  $\partial_j \equiv \partial / \partial X_j$ ,  $\partial_t \equiv \partial / \partial t$ ;  $U_i$  - компоненты скорости ветра,  $Div = \partial_j U_j$ ,  $\Delta = \sum \partial_j^2$ ;  $a = \ln(\rho / \rho_0) - a_0(z)$  - возмущение логарифма плотности,  $a_0(z) = (5/2) \ln(1 - \gamma_a z)$ ,  $\gamma_a = g / (C_p T_0)$  - сухоадиабатический градиент температуры,  $C_p = (7/2) R_B \approx 1005$  Дж/(кг К) - удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении [5],  $T_0 = 288.15$  К,  $\rho_0 = 1.23$  кг/м<sup>3</sup>, - температура и плотность воздуха на поверхности Земли в стандартной атмосфере,  $g$  - ускорение свободного падения;  $f = f(\omega) = \frac{\omega_{bk} + \omega}{\omega_{bk} + \omega_0}$ ,  $\omega_0$  - начальный модуль мезовихря,  $\omega_{bk}$  - его фоновое значение;  $A_j$  - модули коэффициентов турбулентной вязкости в начальный момент [2];  $J$  - момент инерции мезовихря,  $F_i = \Omega_i + \omega_i$  - суммарная завихренность,  $\Omega_k = 0.5 \varepsilon_{kij} \partial_i U_j$  - вихрь поля скорости ветра,  $\omega_k$  - мезозавихренность;  $U_{ij} = 2e_{ij} = \partial_i U_j + \partial_j U_i$ ,  $\hat{A}_j[B] \equiv \partial_j B + B(\partial_j a + \delta_{j3} a_{0z})$ ,  $\varphi_j = \hat{A}_j[f]$ ,  $c^2 = c_0^2 \cdot (1 + 0.4a)$  - квадрат скорости звука,  $c_0^2 = (\partial / \partial \rho_a) P_a = (7/5) R_B T_0 \cdot (1 - \gamma_a z)$  - квадрат скорости звука в начальный момент времени. В системе (1)-(4) использованы стандартные обозначения для тензора Леви-Чевита  $\varepsilon_{kij}$  и единичного тензора  $\delta_{ij}$ ; по повторным индексам производится суммирование. Уравнения (1)-(4) с учетом сил Кориолиса исследуются в [13].

В цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  с центром в  $(x, y) = 0$  начальные условия имеют вид

$$U_\varphi = U_0 f_{ur}(r, R_0) f_{uz}(z) \sigma(R_0 - r), \quad \omega_z = \omega_0 f_{ur}(r, R_1(z)) f_{uz}(z) \sigma(R_1(z) - r),$$

$$J = (J_0 - J_{bk}) \left( 1 - \left( \frac{r}{R_1(z)} \right)^2 \right) f_{uz}(z) \sigma(R_1(z) - r) + J_{bk}, \quad (5)$$

где  $R_0$  - характерный радиус начальных мезовихрей,  $U_0, \omega_0, J_0$  - амплитуды в начальный момент,

$$\sigma(r) - \text{функция Хевисайда, } f_{ur}(r, R_0) = 4 \frac{r(R_0 - r)}{R_0^2},$$

$$f_{uz}(z) = \frac{\ln(1 + z / z_{rgh})}{\ln(1 + H / z_{rgh})}, R_1(z) = \sqrt{J_{bk}} + (0.5R_0 - \sqrt{J_{bk}}) \cdot \frac{2z}{H} \cdot \exp(1 - \frac{2z}{H}); H - \text{высота}$$

рассматриваемой зоны тропосферы;  $J_{bk}$  -- фоновое значение момента инерции мезовихря; все остальные компоненты равны нулю.

Граничные условия для скорости и давления соответствуют обычной модели [6]; мезомасштабная модель турбулентности по Николаевскому позволяет задать турбонапряжения на гранях, из которых все нулевые, за исключением напряжений у Земли, где горизонтальные поверхностные напряжения задаются по правилу Шифринсона [7]:

$$\frac{\tau_x}{\rho} = f(\omega) \cdot (A_1 \frac{\partial U_x}{\partial z} - A_2 \omega_y) = \frac{\lambda}{8} |V| V_x \frac{\tau_y}{\rho} = f(\omega) \cdot (A_1 \frac{\partial U_y}{\partial z} + A_2 \omega_x) = \frac{\lambda}{8} |V| V_y, \quad (6)$$

где  $V$  - характерная горизонтальная скорость (здесь выбрана средняя по вертикали),

$$\lambda = 0.11 \left( \frac{z_{rgh}}{H} \right)^{0.25}, \quad z_{rgh} - \text{параметр шероховатости.}$$

Для численного интегрирования задачи (1)-(6) использован следующий метод. Для упрощения изложения полагаем, что задача решается в кубе, т.е. высота области  $H$  равна ее поперечному размеру:  $H=2L$ ; где  $h = H/N$  - шаг пространственной сетки,  $\tau$  - шаг по времени.

Введем обозначения:  $y_X^{(n)} = \{a; \bar{U}; J; \bar{F}\}_X^{(n)}$  - значение искомого вектора в дискретной трехмерной точке  $X(i_1, i_2, i_3) \equiv \{-L + hi_1, -L + hi_2, hi_3\}$  ( $i_k = 0, 1, \dots, N$ ) в дискретный момент времени  $t_n = n\tau$ . Дискретизированная система (1)-(4) может быть представлена в виде:

$$y^{(n+1)} - y^{(n-1)} = \tau \Pi [y^{(n)}], \quad (6a)$$

где  $\Pi[y]$  - матрица правых частей (1)-(4) представленная в симметричных (трехточечных по каждому измерению) конечных разностях с точностью аппроксимации второго порядка. Представим теперь вектор  $y^{(n)}$  в виде:  $y^{(n)} = \{a^{(n)}; u^{(n)}\}$ . Тогда, например, для  $\Pi_a[y^{(n)}] = \Pi_a[a^{(n)}, u^{(n)}]$  конечно-разностное выражение в точке  $X$  записывается в

$$\text{виде } \Pi_a = -(U_3^{(n)} a_{0z} + Div^{(n)}) - Conv^{(n)}[a^{(n)}], \quad \text{где } Div^{(n)} = (1/(2h)) \sum_{j=1}^3 (U_{j,j^+}^{(n)} - U_{j,j^-}^{(n)}).$$

$$Conv^{(m)}[a^{(n)}] = (1/(2h)) \sum_{j=1}^3 U_j^{(m)} (a_{j^+}^{(n)} - a_{j^-}^{(n)}), \quad j^\pm \equiv X(i_1 \pm \delta_{j1}, i_2 \pm \delta_{j2}, i_3 \pm \delta_{j3}), \quad \text{дискретное}$$

приращение  $X$  по  $j$ -му пространственному аргументу. Например,  $1^\pm \equiv X(i_1 \pm 1, i_2, i_3)$ .

Если  $y_X^{(n-1)}$  и  $y_X^{(n)}$  уже известны (трехслойная схема), то явная линейная интерполяция Адамса ([8], стр.231) позволяет с точностью  $O(\tau^2)$  представить в слое  $(n+1/4)$ :

$$y_X^{(n+1/4)} = y_X^{(n)} + 0.25(y_X^{(n)} - y_X^{(n-1)}). \quad (7)$$

Используя (7), схему «чехарда» с осреднением на трех полуслоях для  $a^{(n)}$  ([9], Т1, стр.365) и метод Рунге-Кутты 2-го порядка для  $u^{(n)} = \{\bar{U}; J; \bar{F}\}^{(n)}$  ([9], Т2, стр. 480-482), переход на  $(n+1)$ -й слой в задаче (1a) может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned} u^{(n+1/2)} &= u^{(n)} + 0.5 \mathcal{P} \Pi_u [a^{(n+1/4)}; u^{(n+1/4)}], \\ a^{(n+1/2)} &= 0.5(a^{(n-1)} + a^{(n)}) + \mathcal{P} \Pi_a [a^{(n)}; u^{(n)}], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\tilde{a}^{(n)} = 0.5(a^{(n-1)} + a^{(n)}) + 0.5\tau\Pi_a[a^{(n)}; u^{(n)}] \quad (9)$$

$$\begin{aligned} u^{(n+1)} &= u^{(n)} + \tau\Pi_u[a^{(n+1/2)}; u^{(n+1/2)}], \\ a^{(n+1)} &= \tilde{a}^{(n)} + \tau\Pi_a[a^{(n+1/2)}; u^{(n+1/2)}], \end{aligned} \quad (10)$$

Схему (7)-(10) естественно назвать модифицированным методом Рунге-Кутты, Адамса и «чехарды» (МРКАЧ).

Можно показать, что схема (7)-(10) имеет погрешность аппроксимации  $O(\tau^2 + h^2)$ . Точный анализ критериев устойчивости не производился. Критерии устойчивости находились путем численных экспериментов в предположении, что являются комбинацией следующих критериев ([9], Т2, стр. 481):

$$Kur \equiv \frac{\tau A_1}{h^2} < Kur_{cr}, \quad (11)$$

$$Cnd \equiv \frac{\tau(|U| + c)}{h} < Cnd_{cr}, \text{ где } c - \text{ скорость звука.}$$

По результатам численных экспериментов (в рассматриваемой модели начальных и граничных условий для задачи (1)-(6)) удалось установить следующие значения критических параметров устойчивости (11) метода МРКАЧ (7)-(10):  $Kur_{cr} \approx 0.16$ ,  $Cnd_{cr} \approx 0.29$ .

Таким образом, если рассматривать задачу в кубе с ребром в 1500 метров и использовать равномерную трехмерную сетку, разместив на каждом ребре 160 точек, то  $h=1500/160 = 9.375$  метров. Тогда из (11) следует, что шаг по времени будет равен  $\tau \approx 0.0088$  с. Следовательно, для расчета первых 40 секунд развития торнадо, надо сделать 4636 шагов по времени (при расчетах использовались значения  $A_1=1000$ ,  $Kur = 0.1$ ).

Другие ограничения связаны со стандартом плавающей арифметики в машинной реализации (например, при реализации типа double с сохранением 15-ти десятичных знаков, ограничение на сохранение точности второго порядка во вторых пространственных производных приводит к

ограничению на число узлов:  $N \equiv \frac{L}{h} < N_\delta \equiv \left(\frac{1}{\delta_d}\right)^{0.25} \sim 5000$ , где  $\delta_d \sim 10^{-15}$  относительная

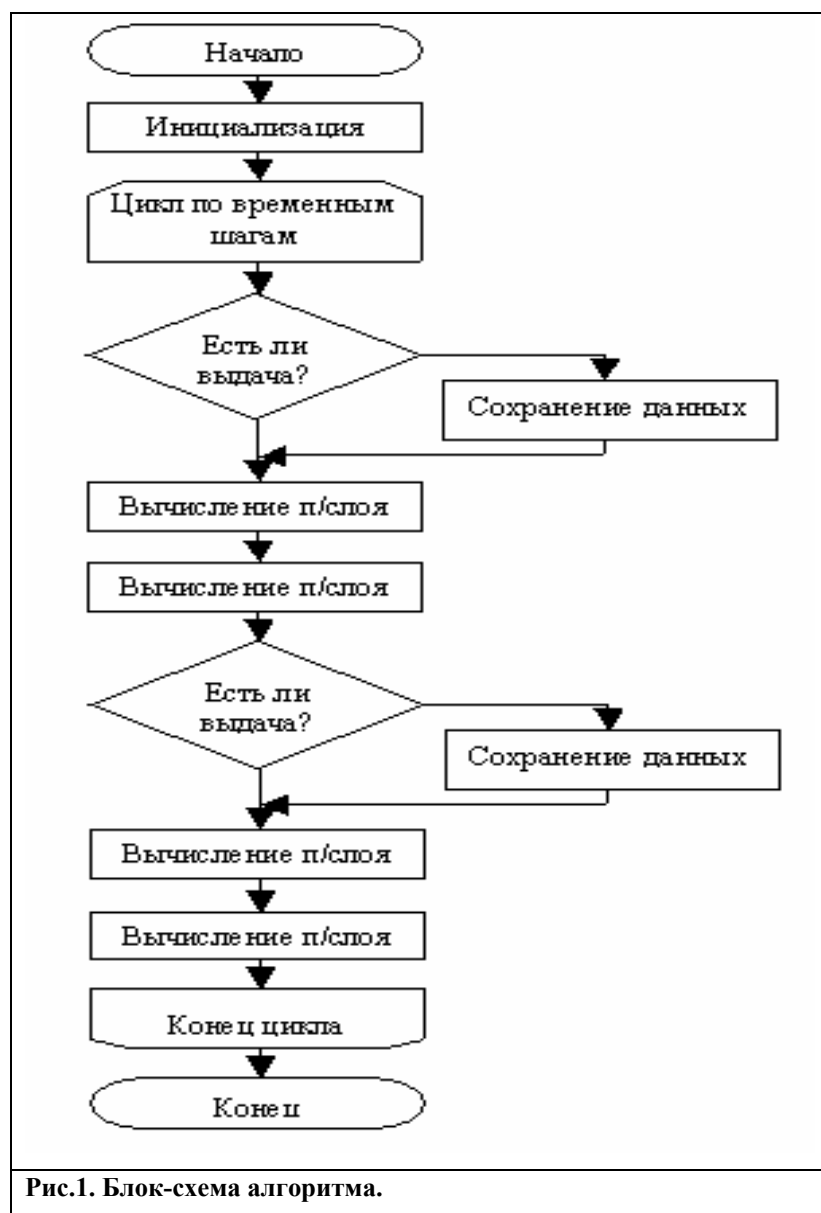
машинная ошибка округления чисел типа double).

### 3. Алгоритм

Программу можно разделить на два блока: блок загрузки и инициализации данных и главный цикл. Сохранение результатов происходит во время выполнения главного цикла.

Входная информация программы хранится в текстовом файле, где перечислены физические параметры модели и вспомогательные данные для работы программы, например, количество выдач значимых результатов и пути к файлам. Далее идет заполнение массивов начальными данными.

После инициализации программа сохраняет нулевой слой данных и начинает выполнять свой основной цикл по времени. Основной цикл включает тройной цикл по пространственным координатам, и сохранение результатов вычислений. Согласно выбранному методу, функция вычисления полуслоя вызывается 4 раза на одну итерацию по времени. Эта функция вычисляет



значения искомых переменных в каждой точке пространственной сетки. Для вычисления значений массивов на текущем шаге используются значения массивов, вычисленные на предыдущих временных полушагах. Таким образом, при вычислении целого временного шага вместо одного значения каждой вычисляемой переменной на все точки пространственной сетки нам требуется хранить в памяти одновременно по 4 таких значения для разных полушагов по времени. Особого внимания заслуживает обработка граничных значений вычисляемых массивов, поскольку для получения значений самых крайних граней требуются значения двух предпоследних граней с данными уже текущего временного слоя. На рис.1 показана общая схема алгоритма.

#### 4. Оптимизация параллельной программы

Как было упомянуто выше, каждый вычисляемый полушаг по времени зависит от предыдущих вычисленных временных полушагов. Но в пределах одного временного полушага значения переменных внутри области фактически могут выполняться независимо друг от друга. Это позволило разделить массивы на блоки и распределить полученные блоки по процессорам кластера. Но поскольку разностная схема является трехточечной (по каждому измерению), необходимо, чтобы блоки перекрывались. Это порождает необходимость обменов между процессорами.

Таким образом, для того чтобы добиться большего ускорения работы параллельной программы, надо было решить как минимум 2 задачи: во-первых, равномерно распределить данные между процессорами и, во-вторых, минимизировать время обмена данными.

Было решено произвести двумерное разбиение массивов следующим образом. Сначала все процессоры ( $P$  штук) разбиваются на двумерную решетку со сторонами  $P_x$  и  $P_y$  ( $P_x \times P_y = P$ ) так, чтобы периметр этой решетки был как можно меньше (чем «квадратнее», тем лучше; обоснование дается ниже). Затем точки рассчитываемой области в плоскости  $XOY$  делятся равными частями на эту решетку процессоров. Очевидно, размерность задачи  $N$  не всегда нацело будет делиться на  $P_x$  или  $P_y$ , и, чтобы не было серьезной рассинхронизации во время счета, остаток от деления распределялся между первыми процессорами. Таким образом, блоки матрицы, находящиеся на каждом из процессов отличаются максимум на один столбец по  $X$  или по  $Y$ , а по  $Z$  они одинаковы, т.к по оси  $Z$  деление не производилось.

Такое разбиение позволило избежать рассинхронизации работы процессоров во время счета и, кроме того, позволяет снизить объем пересылаемых данных.

Области перекрытия, возникшие в результате распределения данных по процессам, называются теньевыми гранями, причем во время вычислений необходимо передавать теньевые грани от процессора, на котором вычисляются их значения, к процессорам, на которых они используются. Характеристикой тневой грани является ее ширина, которая зависит от применяемой разностной схемы. Для трехточечной схемы тневая грань имеет ширину в один пространственный слой, то есть

содержит  $\frac{N}{P_x} \times N$  или  $\frac{N}{P_y} \times N$  элементов. На текущей итерации используются только данные, вычисленные на предыдущих итерациях. Это позволяет обновлять теньевые грани один раз при вычислении каждого слоя, что снижает накладные расходы на пересылку.

При двумерном разбиении количество пересылаемых данных на один процессор равно  $V_{двумерн} = 12 \times N + 100 \times N(X + Y)$ , где  $X$  и  $Y$  – это количество точек по оси  $OX$  и оси  $OY$  соответственно на одном процессоре (по оси  $OZ$  количество точек у всех одинаково и равно  $N$ ). Можно заметить, что сумма  $X + Y$  будет равна  $N$  только при разбиениях на простое число процессоров или на 4, во всех остальных случаях эта сумма будет меньше  $N$ . Это показывает, что чем меньше периметр грани, параллельной плоскости  $XOY$ , тем меньший объем данных потребуется пересылать. Например, при  $N = 160$  и количестве процессоров  $P = 4$   $X$  и  $Y$  будут одинаковы и равны 80, что в сумме дает  $N$  и двумерное разбиение не будет эффективнее одномерного ( $V_{одномерн} = 19.5MB$ ,  $V_{двумерн} = 19.55MB$ ). Когда же количество процессоров  $P = 16$ ,  $X$  и  $Y$  будут равны по 40 и их сумма будет в 2 раза меньше  $N$ , что существенно сократит объем пересылаемых

данных (в этом случае  $V_{\text{двумерн}} = 9.8\text{MB}$ ). Очевидно, при росте  $P$  разница между объемами пересылаемых данных в одномерном и двумерном случаях будет расти.

Параллельная версия программы была реализована в среде параллельной разработки ParJava на языке Java с использованием библиотеки MPI. Инструменты среды ParJava позволили провести анализ параллельной программы и оптимизировать ее код.

Для выявления возможностей распараллеливания циклов последовательная версия была исследована при помощи теста расстояний, реализованного в среде ParJava. Тест показал отсутствие зависимостей по данным между элементами массивов, обрабатываемых в циклах, на которые приходится подавляющее время работы программы.

Эффективное распараллеливание программы возможно благодаря тому, что соотношение времени счета данных на одном узле к времени передачи необходимого объема данных достаточно велико. Подсчитано, что на один временной слой данной реализации задачи приходится делать порядка  $Q = 12 \cdot 10^2 \cdot N^3$  операций с плавающей точкой, где  $N$  – это размерность задачи. При количестве процессоров  $P$ , объем вычислений на процессор будет равен  $Q_p = 12 \cdot 10^2 \cdot N^3 / P$ .

Значимые результаты в виде двоичных массивов сохраняются каждым процессом на локальный жесткий диск. После окончания счета производится объединение сохраненных за все время работы программы данных. Пересылка таких объемов в процессе работы программы вызвала бы сильную рассинхронизацию на каждом шаге и существенно увеличивала бы общее время работы программы.

Тестирование производилось на кластере MBC1000M, на 36 процессорах Alpha21264A, Myrinet (2 Gbit/s). При тестировании производительности использовались такие же начальные данные, при которых получены все физические результаты, но вычислялась только первая секунда жизни торнадо (рис.2). Пунктиром показано линейное ускорение, которое является теоретическим пределом

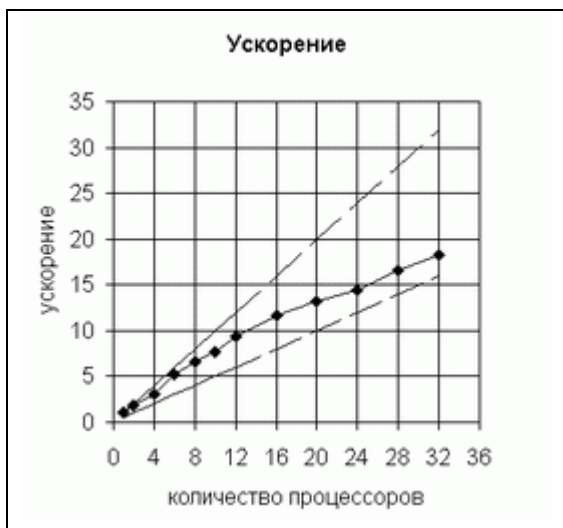


Рис.2. График ускорения на кластере MBC1000M.

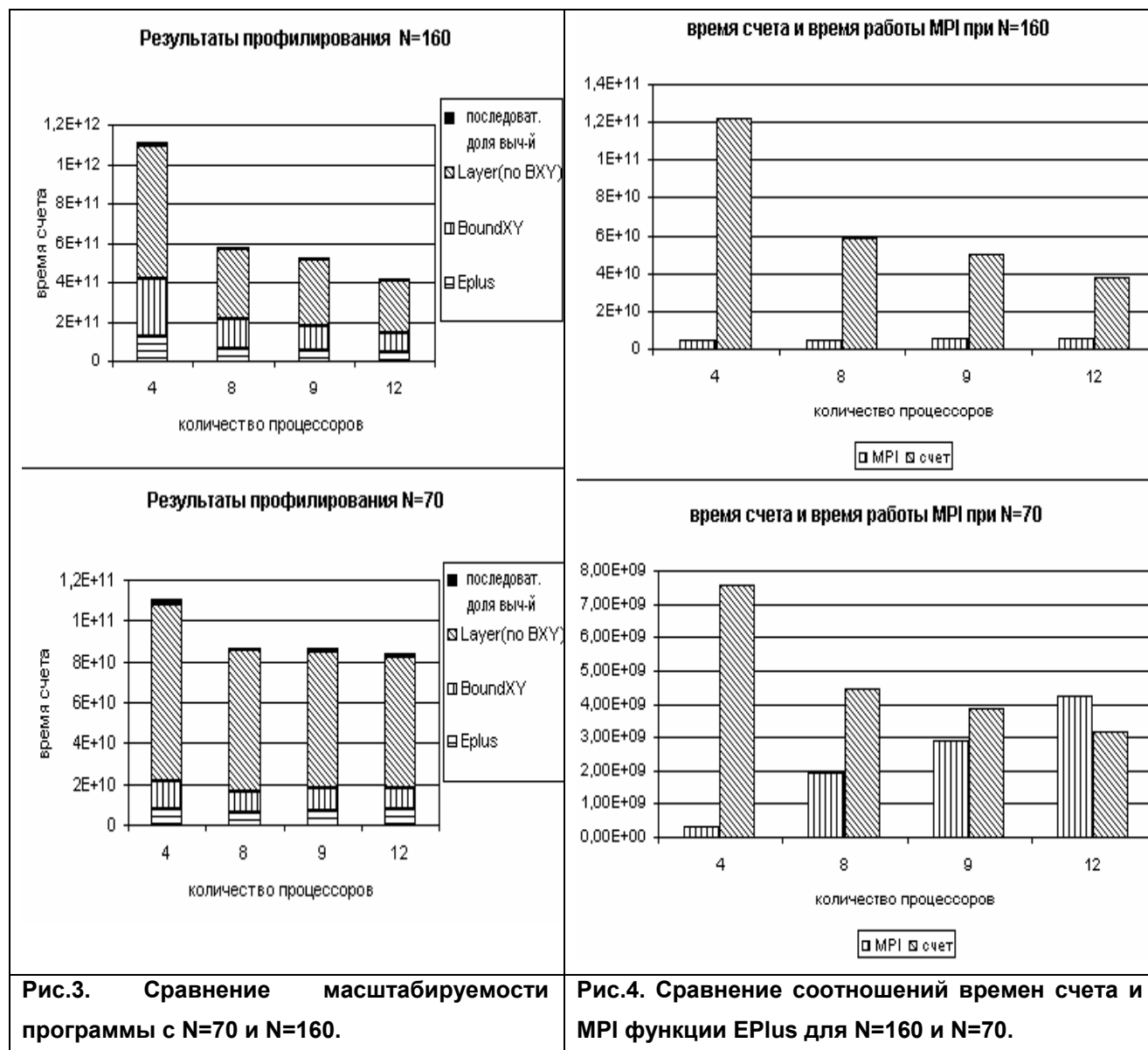
ускорения для параллельной задачи.

По графику видно, что с ростом числа процессоров кривая ускорения снижается. Рассмотрим причины. Для этого задача была протестирована на кластере с двумя разными начальными наборами данных. Первый набор данных представляет собой матрицу размером 160X160X160 точек. Во втором наборе матрица намного меньше 70X70X70 точек. Такие размеры выбраны затем, чтобы показать за счет чего снижается эффективность программы путем сравнения времен счета. В программе замерялось время счета каждой из основных функций при расчетах на 4, 8, 9 и 12 процессорах.



Основные функции – это функция Layer, вычисляющая полуслой по времени, функция Eplus – вычисление работы внешних сил и скорости диссипации, потока энергии через границы рассматриваемой области и сохранение результатов вычислений, функция BoundXY – вычисление значений на границах массивов. Функции BoundXY и Eplus характерны тем, что в них происходит относительно немного вычислений, но требуются обязательные пересылки данных.

Из рис.3 (а,б) видно, что при уменьшении размера матрицы ускорения вообще не достигается. Это



происходит потому, что время непосредственного вычисления искомых значений уменьшается, тогда как время на пересылку данных все равно тратится. Причем хуже всего себя ведут функции BoundXY и Eplus при  $N = 70$ , у которых доля вычислений мала, по сравнению с функцией Layer. Доля времени пересылок по отношению к времени счета функции Eplus показана на рис.4. Видно, как с увеличением числа процессоров растет доля MPI на маленькой матрице, тогда как доля времени вычислений уже не уменьшается. На большой матрице доля MPI остается относительно небольшой по сравнению с долей счета.

Это означает, что оптимальным для матрицы  $N = 160$  является количество процессоров  $P = 16$ , а для матрицы  $N = 70 - P < 8$ . Далее уже идет снижение масштабируемости. Для большего количества процессоров надо брать большую матрицу. Задача эффективного параллельного программирования заключается в данном случае в увеличении этого оптимального количества процессоров. В данный момент ведется работа над трехмерным разбиением, за счет чего планируется еще поднять график масштабируемости.

## 5. Результаты и обсуждения

На рис. 5-6 представлены некоторые примеры визуализации расчетов возникновения торнадо при начальных параметрах:  $U_0 = 1.5$  м/с;  $R_0 = 300$  м;  $L = 750$  м;  $H = 1500$  м,  $Z_{rgh} = 0.1$  м,  $A_1 = 1000$  м<sup>2</sup>/с; безразмерные параметры взаимодействия с мезомасштабом ( $Пm$ ,  $Пv$ ) выбирались близкими к использованным в [2]:

$$Sv = 0.5 \quad A_2 / A_1 = 0.01, \quad Mv = A_3 / A_1 = 1, \quad Iv = A_4 / A_1 = 1,$$

$$Пm = 0.25 (Iv + Mv) (1 + \omega_{rel}) \quad J_{rel} = 750,$$

$$Пv = Sv (1 + \omega_{rel}) = 120,$$

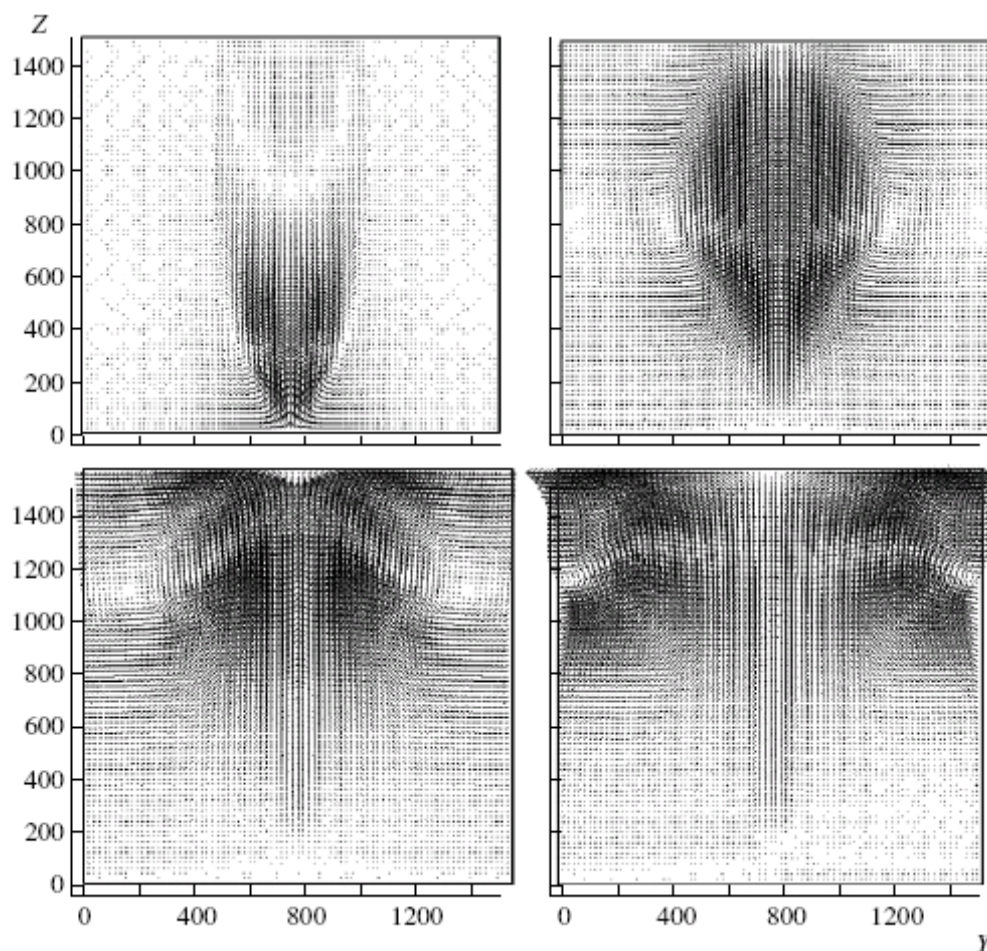
$$J_{bk} / J_0 = 0.05, \quad \omega_{bk} / \omega_0 = 0.01,$$

где  $\omega_{rel} = \omega_0 R_0 / U_0$ ,  $J_{rel} = J_0 / R_0^2$ . Термодинамические параметры у Земли – «стандартная атмосфера» [5], остальные параметры взяты из задачи [2].

В начальный момент ( $t_0=0$ ) вертикальных и радиальных составляющих скорости ветра не было. Со временем происходит возникновение вертикально-радиальной циркуляции (рис.5). В момент времени  $t_1$  хорошо заметна зона конвергенции внизу (приток к центру;  $\text{div} = -0.027 \text{ с}^{-1}$  на расстоянии около 50 м от центра на высоте 9.4 м) и вертикальная составляющая с максимумом 6 м/с в центре на высоте около 200 м; сверху формируется зона дивергенции с нисходящими потоками на периферии.

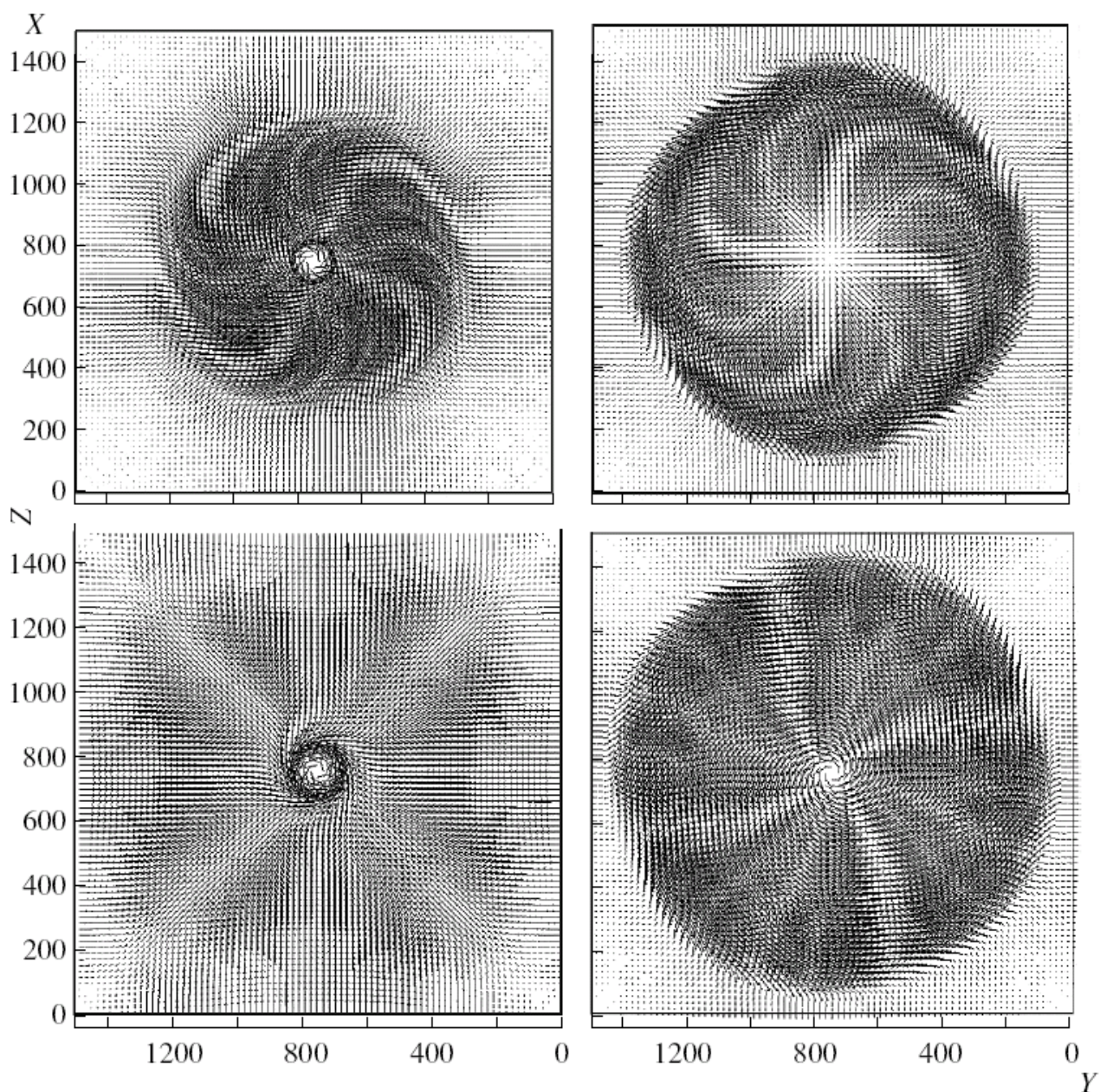
В момент времени  $t_5$  ( $\cong 51.7$  с) восходящая скорость достигает уже 31 м/с на высоте около 600 м, максимальная скорость притока ( $-U_r$ ) достигает 7 м/с на высоте около 500 м на расстоянии 230 м от центра, а скорость оттока ( $+U_r$ ), соответственно, 5 м/с на высоте 1200 м и на расстоянии 330 м от центра. Хорошо заметны центры циркуляции на высоте около 800 м и расстоянии около 400 м от центра ( $Y = 350$  и 1150 м).

В дальнейшем (при  $t_{10}$  и  $t_{16}$ ) эти центры поднимаются, удаляясь от оси торнадо. В целом прослеживается формирование грибовидной структуры торнадо: узкого «хобота» восходящего конвергентного движения внизу и широкой «тарелки» дивергентных потоков вверху. Видны также элементы «тонкой структуры» торнадо (спиралеобразные лучевые области максимумов и минимумов вертикально-радиальной скорости), возможно, обусловленные внутренними и звуковыми волнами, порождаемыми торнадо.



**Рис.5.** Эволюция вектора скорости в плоскости  $YZ$ , проходящей через центр вихря ( $X=750$  м) в последовательные моменты времени (слева направо и сверху вниз):  $t_1=10.34$  с,  $t_5=51.7$  с,  $t_{10}=103.4$  с,  $t_{16}=165.4$  с.

При  $t_{10}$  скорости притока и оттока, соответственно, составляют 10 м/с и 22 м/с, восходящая скорость – до 32 м/с. При  $t_{16}$  скорости притока и оттока составляют 9 м/с и 19 м/с, восходящая скорость – до 12 м/с. В этот момент торнадо уже пережило свой пик и находится в стадии медленного угасания. На рис. 6 показаны проекции горизонтальных компонент скорости на разных горизонтах в момент времени  $t_8 = 83$  с. На чисто вращательное движение (в начальный момент при  $t_0 = 0$  с) со временем накладывается спиралевидное. Проявление неоднородностей спиралевидных токов по азимутальному углу, видимо, обусловлено влиянием границ области и возникновением системы стояче-бегущих звуковых (инфразвуковых) и внутренних волн. Количество азимутальных «лепестков» увеличивается с высотой, достигая максимума на высоте около 1000 м, где скорость ветра достигает своего абсолютного максимума в 42.5 м/с на расстоянии около 20 м от центра. Радиус вихря также растет с высотой, достигая максимума на высоте около 1200 м.



**Рис.6.** Поля скоростей в момент времени  $t_8 = 83$  с на разных горизонтах (слева направо и сверху вниз):  $z_{10} = 187.5$  м,  $z_{40} = 750$  м,  $z_{60} = 1125$  м,  $z_{79} = 1481$  м.

По своей конфигурации и физическим параметрам модель ИАВ на рис. 5-6 близка к малому урагану, наблюдавшемуся в Монтане, США, 94-е шоссе в долине Yellowstone River (рис.7). По описаниям автора снимка, ураган наблюдался несколько минут и угас, не вызвав заметных разрушений. По структуре он напоминает 4-й кадр на рис. 5.



**Рис.7. Ураган в Монтане, США, 94-е шоссе в долине Yellowstone River. Снимок А. Паншина (С) авг. 2005.**

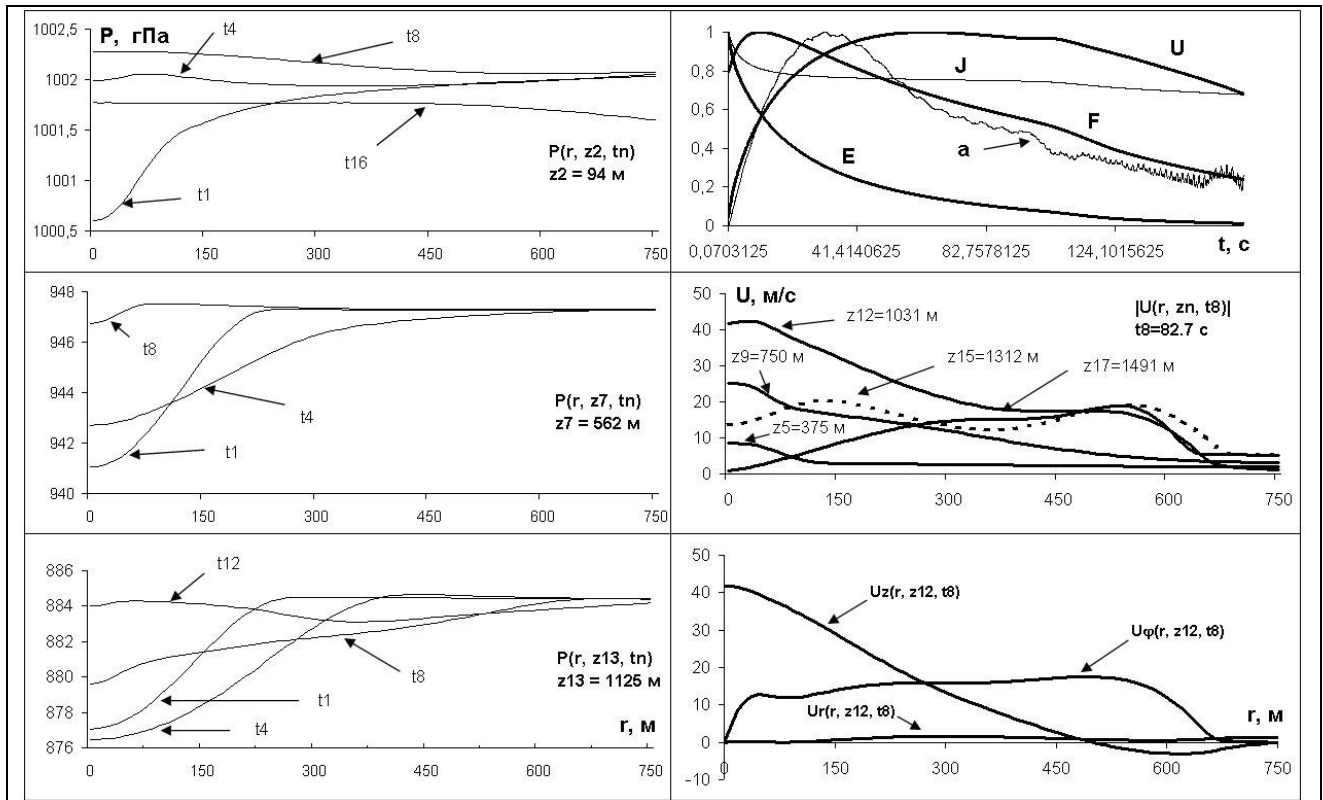
Аналогичными параметрами обладал торнадо категории Т3 («приводнившийся смерч»), наблюдавшийся вблизи городка Госпорт, гр. Гэмпшир, Англия 5.11.1999 [10]. Он переместился за несколько минут на 750 м внутрь деревни Хилл-Хед, вблизи городка, затем, подняв несколько свиней в воздух, затух за несколько минут.

Среднеквадратичная (по всей области) скорость ветра  $U$  (правый верхний график на рис.8) резко увеличивается от 0.1 до 9.5 м/с за 63 с., затем порядка

минуты практически не меняется, после чего начинает медленно убывать. При этом суммарная энергия  $E = E_{macr} + E_{meso} + E_{in}$  всегда убывает, поскольку вся система в целом замкнута (при этом подсистема макродвижений ветра – открытая, так как взаимодействует с подсистемой мезомасштабных движений, за счет чего, собственно, и возможно взрывоподобное возникновение ИАВ [2], как явление самоорганизации в открытых диссипативных системах [11]). Среднеквадратичный момент инерции  $J$  также убывает со временем; при этом достаточно быстро за 10 секунд он выходит на новый уровень, равный примерно 0.8 начального, и далее, на протяжении счета, практически не меняется. Фактически, это означает первую бифуркацию и переход на новый мезомасштаб. Это подтверждает и поведение среднеквадратичного суммарного вихря  $F$ , достигающего максимума за 10 секунд. На том же графике показана эволюция среднеквадратичного значения термодинамического параметра  $a$  (все значения нормированы по максимальным), с которым связаны все основные термодинамические величины: давление, температура, плотность и внутренняя энергия. Средние термодинамические показатели, как видно из графика, достигают максимума примерно за 31 секунду, затем в целом медленно падают, испытывая при этом высокочастотные (по сравнению с основным масштабом явления) колебания. Эти колебания вызваны внутренними и звуковыми волнами, порождаемыми торнадо. Такое явление всегда наблюдалось [12], однако до сих пор не находило объяснения. Полученный результат генерации звуковых и внутренних волн в торнадо заслуживает более подробного рассмотрения в последующих работах. На среднем правом графике рис.8 представлено радиальное распределение модуля скорости в момент достижения максимума ( $t_8$ , около 83 с) на высотах вблизи горизонта абсолютного максимума  $z_{12} = 1031$  м. Радиальные

максимумы выше  $z_{12}$  тяготеют к периферии; так, на высоте  $z_{15} = 1312$  м модуль скорости ветра практически не зависит от радиуса, испытывая два локальных максимума на расстояниях 140 и 550 м от центра, а на высоте  $z_{15}$  максимум достигается лишь на периферии, около 520 м от центра. Ниже отметки максимальной скорости  $z_{12}$ , модуль скорости ветра максимален в центре. На нижнем правом графике показаны отдельные компоненты ветра на горизонте максимальной скорости.

Радиальное распределение давления показано в левой части рис.8. Видно, что характерная «яма»



**Рис.8.** Слева - радиальное распределение давлений на разных высотах ( $z_n$ ) в разные моменты времени ( $t_n$ ). Справа сверху – временная эволюция суммарной, интегральной по области задачи, энергии  $E = E_{\text{maxr}} + E_{\text{meso}} + E_{\text{in}}$  и среднеквадратичных значений скорости  $U$ , суммарной завихренности  $F$ , момента инерции мезовихря  $J$  и термодинамического параметра  $a$ ; все значения нормированы к максимальным по времени. Справа в середине – радиальное распределение модуля скорости на разных высотах в момент  $t_8 = 82.7$ с достижения максимальной абсолютной скорости ветра  $U_{\text{max}} = 42$  м/с. Справа внизу – радиальное распределение компонент скорости ветра при  $t=t_8$ , на горизонте  $z_{12}=1031$ м, где достигается абсолютный максимум скорости.

давления в центре («глаз торнадо») на данном горизонте наиболее глубока в момент достижения максимума скорости на данном горизонте, причем «глубина» ее растет с высотой: от 2 мбар (гПа) на высоте 94 м до 8 мбар на высоте 1125 м; после прохождения максимума на данном горизонте яма исполаживается и даже наблюдается подъем давления в центре, а область пониженного давления образует расширяющееся кольцо.

Приведенные графики были получены с помощью написанного пакета программ с использованием библиотеки VisAD. Программы позволяют построить одномерные и двумерные сечения матриц, а также визуализировать и анимировать трехмерную векторную модель торнадо [14].

Конечно, приведенные результаты носят предварительный характер. Но они продемонстрировали адекватность используемой модели и возможность использования среды ParJava для разработки такого рода приложений. Дальнейшая работа связана с исследованием условий возникновения торнадо путем использования более мелкой сетки и расчетов на больших кластерах, а также планируется исследование и оптимизация параллельного алгоритма с помощью средств динамического анализа, предоставляемых средой ParJava.

Поскольку система уравнений (1)-(4) ранее не рассматривалась в литературе, работа имеет еще один важный аспект: апробация и выбор оптимального метода численного интегрирования поставленной задачи о генерации ИАВ.

Помимо МРКАЧ, на кластерах был исследован ряд других методов численного интегрирования (1)-(4): метод сжатых отображений, методы Рунге-Кутты (РК) 3-7-го порядков [9] и другие. Было выяснено, что по сходимости, точности и устойчивости, а также по вычислительной эффективности они заметно уступают МРКАЧ.

Так, например, методы РК теряют устойчивость (в рассмотренном диапазоне параметров задачи) после прохождения нескольких тысяч временных слоев, в то время как МРКАЧ – после нескольких десятков тысяч; метод прямых применительно к данной задаче обладает чрезвычайно низкой вычислительной эффективностью. Таким образом, параллельные расчеты позволили в разумные сроки проверить эффективность нескольких алгоритмов численного интегрирования новой сильно нелинейной многокомпонентной трехмерной системы уравнений смешанного типа (1)-(4), точные решения которой неизвестны и вряд ли могут быть получены аналитически. Точный сравнительный анализ эффективности различных схем численного интегрирования, либо численный анализ алгоритмов в последовательной среде занял бы неизмеримо большее время.

В целом, представленные в данной статье результаты описывают рождение и начальную эволюцию короткоживущего (несколько минут) торнадо малой интенсивности (до 43 м/с); рассмотрена лишь одна из многочисленных реализаций в пространстве параметров подобия (задача имеет 10 параметров подобия). Трехмерные кластерные расчеты в рамках «сухой адиабаты», основанные на мезомасштабной теории турбулентности [1], показывают возможность рождения торнадо или местного урагана за счет накопленной в атмосфере энергии мезовихрей, что подтверждает прежние выводы, сделанные в результате численных экспериментов для одномерной (осесимметричной) несжимаемой атмосферы [2]. Полученные результаты по численному моделированию и визуализации процесса рождения и эволюции трехмерного торнадо будут развиты в последующих работах.

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. Nikolaevskiy V.N. Angular Momentum in Geophysical Turbulence: Continuum. Spatial Averaging Method . Dordrecht: Kluwer (Springer). 2003. P. 245.
2. Арсеньев С.А., Губарь А.Ю., Николаевский В.Н. Самоорганизация торнадо и ураганов в атмосферных течениях с мезомасштабными вихрями. // ДАН, 2004, т.396, № 4, с.541-546.
3. The Cache Performance and Optimizations of Blocked Algorithms. Monica S. Lam, Edward E. Rothberg and Michael E. Wolf, Computer Systems Laboratory, Stanford University, CA 94305.
4. Victor Ivannikov, Serguei Gaissaryan, Arutyun Avetisyan, Vartan Padaryan. Improving properties of a parallel program in ParJava Environment // The 10th EuroPVM/MPI conference. LNCS 2840. Sept. 2003, Venice. pp. 491-494.
5. Хргиан А.Х. Физика атмосферы. М.: Изд-во Московского Университета, 1986. С.240.
6. Хаин А.П., Сутырин Г.Г. Тропические циклоны и их взаимодействие с океаном. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. С.272.
7. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика. М.: Машиностроение, 1978. С.463.
8. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989, 432 с.
9. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей (2т). – М.: Мир, 1991. С.504, С.522.
10. Gilbert Anthony. Tornado With a Measured Intensity of T3 at Hill Head, Hampshire, 5, November 1999. // J.Meteorol. 2000. 25, N254. с.361-367.
11. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987. С.240.
12. E. S. Posmentier//Geophys. J. R.astr. Soc. (1967), 13, pp.487 - 501.
13. А.Ю.Губарь, А.И.Аветисян, В.В.Бабкова. Возникновение торнадо: трехмерная численная модель в мезомасштабной теории турбулентности по Николаевскому// ДАН, 2008, т.419, №4, с. 1–6
14. Губарь А.Ю, Аветисян А.И, Бабкова В.В. Анимация результатов 3D моделирования торнадо в теории МТН. <http://www.AGubar.narod.ru>.